

İKİNCİ DERECEDEKİ DENKLEMLER

* $ax^2 + bx + c = 0$ denklemler ikinci derecedeki denklemlerdir.

* a, b ve c gerçel sayılarına denklemin katsayıları denir.

* bu denklemi sağlayan x değerlerine denklemin kökü, köklerin oluşturduğu kümeye ise çözüm kümesidir.

* bitirmeyenin derecesi kadar kök bulunur.

not: denklemin kökü $x=1$ vb. denilirse, $x=1$ verilen denkleme yerleştirip 0'a eşitleriz.

Çarpanlara ayırma:

a) $x^2 - x - 6 = 0$

$$\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ -3 & 2 \end{array}$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = -2$$

$$GK = \{3, -2\}$$

b) $3x^2 - x - 2 = 0$

$$\begin{array}{cc} 3x & -2 \\ x & 1 \end{array}$$

$$(3x-2)(x+1)$$

$$x = -\frac{2}{3} \quad x = -1$$

$$GK = \{-\frac{2}{3}, -1\}$$

c) $x^2 + 6x + 8 = 0$

$$\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ 4 & 2 \end{array}$$

$$x = -4 \quad x = -2$$

$$GK = \{-4, -2\}$$

diskriminant (Δ):

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin diskriminantı;

$\Delta = b^2 - 4ac$ formülü ile bulunur.

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri;

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ile bulunur.}$$

diskriminant ile kök bulma:

→ $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin diskriminanti Δ olarak üzece;

$\Delta < 0$ ise

* denklemin gercek kökü yoktur.

* $\emptyset$

* denklemin karmaşık sayı dan 2 kökü vardır.

$\Delta = 0$ ise

* denklemin tam karedir

* denklemin birbirine eşit iki gercek kökü vardır.

* denklemin çakışık 2 kökü vardır

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{-2a} \text{ dir.}$$

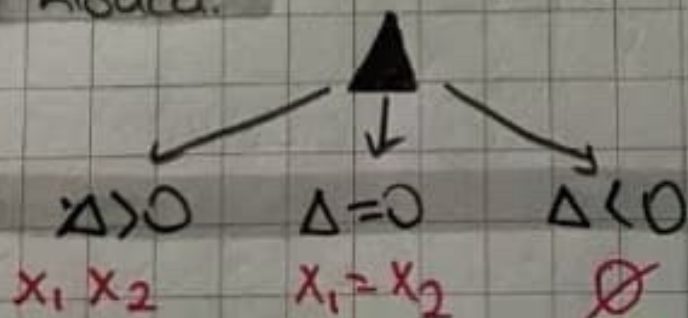
$\Delta > 0$ ise

* denklemin iki farklı gercek kökü vardır.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

kısaca:



not: $ax^2+bx+c=0$ denkleminin simetrik 2 gercek kökü varsa $b=0$ 'dır.
ayrıca $a.c < 0$ olmalıdır.

$$\begin{matrix} x_1=1 & x_2=-1 \\ x_1=2 & x_2=-2 \end{matrix}$$

Karmaşık Sayılar:

İkinci dereceden denklemin kökleri / sanal sayı:

→ $x^2+1=0$ denkleminin GK=?

$x^2=-1$ ise reel sayılarda olmaz fakat sanal sayılarda cevabı vardır. $x=i$

sanal sayı:

* $\sqrt{-1}=i$, sanal sayıdır.

$$\begin{matrix} * i^1=i \\ * i^2=-1 \\ * i^3=-i \\ * i^4=+1 \end{matrix}$$

! her dördte bir bosa sarar. 2'ün katı ise hep 1.

örnek:

çözüm:

$$\sqrt{-16} + \sqrt{-9} \Rightarrow \sqrt{-1} \cdot \sqrt{16} + \sqrt{-1} \cdot \sqrt{9} \quad 4i + 3i = 7i$$

karmaşık sayılar:

→ $z = a + bi$ biçiminde yazılan tüm sayılara denir. 'kümesi' 'C' ile gösterilir.

$$z = \underline{a} + \underline{bi}$$

gerçek kısım

sanal kısım

! $Re(z) = a$

$Im(z) = b$

not: $\Delta < 0$ olduğunda gercek kök yoktur ama karmaşık sayı olan 2 tane kökü vardır.

Örnek soru:

$x^2 + 2x + 2 = 0$ karmaşık sayı köklerini bulunuz?

$$a = 1$$

$$b = 2$$

$$c = 2$$

$$1) \Delta = b^2 - 4ac$$

$$4 - 8 < 0$$

$$-4 < 0 \rightarrow \text{reel yok}$$

sanal var.

$$2) x_1 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} \rightarrow \frac{-2 \pm 2i}{2} \Rightarrow x_1 = -1 + i$$

$$3) x_2 = \frac{-2 - \sqrt{-4}}{2} = x_2 = -1 - i$$

karmaşık sayının eşleniği:

$\rightarrow z = a + bi$ ise $\bar{z} = a - bi$ * sadece sanal kısmının işareti değişir.

not:

$$(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$$

$$(1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i$$

* eşleme (=) denklemlerinde sanal sanala, gerçel gerçele eşlenir.

örnek soru: $(2^6 = (2^2)^3) \rightarrow \text{not.}$

$$= (1+i)^4 + (1-i)^6$$

$$= ((1+i)^2)^2 + ((1-i)^2)^3 = 4i^2 + (-2i)^3 = -4 - 8i^3 = 8i - 4$$

Not:

$$z = a + bi \text{ duvak üzere}$$

$$\bar{z} = a - bi \text{ 'dir}$$

(2kare farkı)

Buna göre:

$$z \cdot \bar{z} \Rightarrow (a + bi)(a - bi)$$

$$\Rightarrow a^2 - abi + abi - b^2 i^2$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2$$

gerçek kısmın karesi,
sanal kısmın kat sayısının karesi.

Örnek soru:

$$z = 3\bar{z} - b + 15i$$

2 karmaşık sayısı kaçtır?

$$z = a + bi$$

$$a + bi = 3(a - bi) - b + 15i$$

$$a + bi = 3a - 3bi - b + 15i$$

$$= \underbrace{3a - b}_{\text{reel}} + \underbrace{1(3b + 15)}_{\text{sanal}}$$

reel

$$3a - b = a$$

$$2a = b$$

$$a = 3$$

sanal

$$-3b + 15 = b$$

$$4b = 15$$

$$b = \frac{15}{4}$$

Cevap: $z = 3 + \frac{15}{4}i$

Örnek soru:

$$A = \frac{1+i}{1-i}$$

$$B = \frac{4+i}{1-i}$$

Buna göre $\text{Im}(A \cdot B) = ?$

→ sanal

$$\left(\frac{1+i}{1-i} \right) \cdot \left(\frac{4+i}{1-i} \right) = \frac{4+i+4i+i^2}{(1-i)^2} = \frac{3+5i}{-2i}$$

$$= \frac{6i+10i^2}{-4 \cdot i^2} = \frac{6i-10}{4}$$

$$\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

kök-katsayı ilişkisi:

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun.

kökler toplamı

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

kökler çarpımı

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

kökler farkı

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

köklerin carpuwya göre tavrı

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}$$

$$= -\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} = -\frac{b}{c}$$

2 kare toplamı

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

küpler toplamı

$$a^3 + b^3 = (a+b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2) \cdot (x_1^2 - \underbrace{x_1x_2}_{c} + x_2^2) = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

denklem kurma:

$$\text{hâzır toplama} = x_1 + x_2 = T$$

$$\text{hâzır çarpma} = x_1 \cdot x_2 = G \quad \text{ise}$$

$$x^2 - Tx + G = 0$$

hâleri karmaşık sayı dan gerçek katsayılı denklem kurma:

$$x_1 = a + bi \quad \text{ise} \quad x_2 = a - bi \quad \text{'dir.}$$

$$x^2 - Tx + G = 0 \quad \text{'dir.}$$

$$\begin{array}{l} i^1 = i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i \\ i^4 = 1 \end{array}$$